４節　式と証明

① 恒等式

今まで扱っていた方程式は

$$x^3-2x-8=0$$

のような形で、この方程式の解（４と－２）を代入したときは成り立つが、
それ以外の数を代入しても成り立たない「等式」である。
これに対し

$$(x+2)^2=x^2+4x+4$$

は、xにどんな値を代入しても成り立つ。このように、
文字にどんな値を代入しても成り立つ式を「恒等式」という。

> 大雑把に言うと、恒等式とは
> 　右辺を変形→左辺になる、同様に
> 　左辺を変形→右辺になる
> 等式である。

☆恒等式であるための条件

与えられた等式が恒等式かどうか、調べるには文字に適当な数を代入すればよい。恒等式であるならば、どんな数を代入しても成り立つはずである。
例えば、a、b、cを実数として

$$ax^2+bx+c=x^2-3x+6 \quad ・・・①$$

が恒等式であるか調べる。いま①式に$x=0$、$x=1$、$x=-1$を代入すると、

$$c=6$$
$$a+b+c=4$$
$$a-b+c=10$$

が出てくる。この３式を連立方程式として解くと、$a=1$、$b=-3$、$c=6$となる。
$a=1$、$b=-3$、$c=6$ならば①式は明らかに恒等式である。

恒等式であるための条件

> 等式　$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$が恒等式ならば
> 　　$a=a'$、$b=b'$、$c=c'$
> である。

一般に、多項式$P(x)$、$Q(x)$において
　$P(x)=Q(x)$が恒等式　⇔　$P(x)$と$Q(x)$の次数は等しく、
　　　両辺の同じ次数の項の係数は、それぞれ等しい。

例題１

等式$a(x+1)^2+b(x+1)+c=2x^2-x+3$が$x$についての恒等式となるように、
定数a、b、cの値を定めよ。

解　左辺を展開し、xについて同類項をまとめると、

$$ax^2+(2a+b)x+a+b+c=2x^2-x+3$$

となる。恒等式ならば同じ次数の項の係数は同じだから、

$p=2$　　　（x^2の係数）
$2p+q=-1$　　（xの係数）
$p+q+r=3$　　（定数項）

この３式を連立方程式として解くと

$a=2$、$b=-5$、$c=6$

＊＊＊

☆等式の証明

整式A、Bがあり、等式$A=B$が恒等式であることを証明するには、次の３つの方法がある。

1	AをBに変形する。または、BをAに変形する
2	A、Bをそれぞれ同じ式Cに変形する
3	$A-B=0$を示す

例題２

次の等式を証明せよ。

$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$$

証明　左辺と右辺をそれぞれ展開し、同じ式に変形する。

左辺$=a^2+2ab+b^2$

右辺$=a^2-2ab+b^2+4ab$

$=a^2+2ab+b^2$

左辺と右辺が同じ式になるから　$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

＊＊＊

☆条件付きの等式

等式の中にはある条件がつくと、恒等式と同じように成り立つ場合がある。

例題３

$a+b+c=0$のとき、次の等式を証明せよ。

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

証明　$a+b+c=0$という条件から

$c=-a-b)$

この式$c=-a-b$を問題の等式のcに代入して、両辺それぞれ展開すると

左辺$=a^3+b^3+(-a-b)^3=-3a^2b-3ab^2$

右辺$=3ab(-a-b)=-3a^2b-3ab^2$

となる。左辺＝右辺であるから　$a^3+b^3+c^3=3abc$

証明終わり。

＊＊＊

例題４

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$のとき、$\dfrac{a}{a-b}=\dfrac{c}{c-d}$を証明せよ。

証明　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$　とおくと　$a=bk$、$c=dk$

左辺に$a=bk$を代入、右辺に$c=dk$を代入すると

$$左辺=\frac{a}{a-b}=\frac{bk}{bk-b}=\frac{bk}{b(k-1)}=\frac{k}{k-1}$$

$$右辺=\frac{c}{c-d}=\frac{dk}{dk-d}=\frac{dk}{d(k-1)}=\frac{k}{k-1}$$

となる。左辺＝右辺であるから　$\dfrac{a}{a-b}=\dfrac{c}{c-d}$

証明終わり。

＊＊＊

① 不等式の証明

☆不等式の基本的性質

実数a、b、cがあるとき、不等式は以下の性質がある。

不等式の基本的性質

$a>b$であるとき

（１）　$a+c>b+c$、$a-c>b-c$

（２）　$c>0$ならば　　$ac>bc$、$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

（３）　$c<0$ならば　　$ac<bc$、$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$　（不等号の向きが変わる）

また、実数a、bに対して、以下の性質が成り立つ。

a、bが同符号　$\Leftrightarrow$　$ab>0$　（プラス同士、マイナス同士を掛けるとプラス）

a、bが異符号　$\Leftrightarrow$　$ab<0$　（プラスとマイナスを掛けるとマイナス）

不等式の証明によく使用する性質として

実数aに対し、$a^2 \geqq 0$が成り立つ。
等号が成り立つのは、$a=0$のときである。

つまり、実数の範囲では、ある数を２乗すれば必ず、０以上になる。

例題５

不等式　$(x+y)^2 \geqq 4xy$を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

方針：　左辺－右辺≧０　を証明する。

証明

$左辺-右辺=(x+y)^2-4xy$

$=x^2+2xy+y^2-4xy$　　←展開する

$=x^2-2xy+y^2$　　←同類項をまとめる

$=(x-y)^2$　　←因数分解する

$(x-y)^2 \geqq 0$であるから　　←$(x-y)$は実数だから２乗すれば０以上

$左辺-右辺=(x+y)^2-4xy \geqq 0$

よって、　$(x+y)^2 \geqq 4xy$

等号が成り立つのは、$x-y=0$、　　←$(x-y)^2 \geqq 0$より

すなわち$x=y$のときである。

＊＊＊

例題６

不等式　$x^2+6>4x$ を証明せよ。

証明

左辺－右辺$=x^2+6-4x$

$$=(x^2-4x)+6$$
$$=\{(x-2)^2-4\}+6 \qquad \leftarrow \text{平方完成}$$
$$=(x-2)^2+2$$

$(x-2)^2 \geqq 0$　であるから

$$(x-2)^2+2>0$$

ゆえに　$x^2+6>4x$

＊＊＊

実数 a 、b に対し、$a^2 \geqq 0$ 、$b^2 \geqq 0$ が成り立つから

$$a^2+b^2 \geqq 0$$

が成り立つ。ここで、等号が成り立つのは

$a^2=0$ かつ $b^2=0$ 、すなわち $a=b=0$ のときである。

これを使って不等式を証明してみよう。

例題７

不等式

$$a^2+b^2 \geqq -ab$$

を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

証明

左辺－右辺$=a^2+b^2+ab$

$$=\left(a^2+ab+\frac{1}{4}b^2\right)-\frac{1}{4}b^2+b^2$$

$$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2$$

ここで、$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2 \geqq 0$、$\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$ であるから

$$a^2+b^2+ab \geqq 0$$

ゆえに　$a^2+b^2 \geqq -ab$

等号が成り立つのは $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$ のときだから、

$a+\frac{1}{2}b=0$　かつ　$b=0$、すなわち

$a=b=0$ のときである。

＊＊＊

☆平方による比較

一般に次の性質が成り立つ

$A \geqq 0$、$B \geqq 0$のとき

$$A \geqq B \iff A^2 \geqq B^2$$

例題８

$a \geqq 0$、$b \geqq 0$のとき、$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq \sqrt{a+b}$を証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$ $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq \sqrt{a+b}$の両辺を２乗して

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{a+b}\right)^2$$

$$a+2\sqrt{ab}+b \geqq a+b$$

$$\text{左辺}-\text{右辺}=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$$

$$=2\sqrt{ab} \geqq 0$$

したがって $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{a+b}\right)^2$

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq 0$、$\sqrt{a+b} \geqq 0$であるから

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqq \sqrt{a+b}$$

＊＊＊

☆相加平均と相乗平均

普通、２つ数の平均をとるときは、２つの数を足して２で割る。
数学ではこれを「相加平均」という。数学では「２つの数を掛けて平方根をとる」という平均もあり、「相乗平均」と呼ぶ。

２つの数a、bがあるとき

相加平均 $\dfrac{a+b}{2}$ 相乗平均 $\sqrt{ab}$

英語と数学のテストが
３６点と６４点だったとき

相加平均は$\dfrac{36+64}{2}=50$

相乗平均は$\sqrt{36\times 64}=\sqrt{2304}=48$

相加平均と相乗平均には以下の関係がある

$a \geqq 0$、$b \geqq 0$のとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは、$a=b$のときである。

重要！！

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ よりも $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ の形で使われることが多い。

例題９

$a>0$のとき、$a+\dfrac{4}{a} \geqq 4$を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

$\boxed{\text{証明}}$　$a>0$、$\dfrac{1}{a}>0$であるから、相加平均と相乗平均の関係を使って、

$$a+\frac{4}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$$

$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$で$a=a$、$b=\dfrac{1}{a}$としたもの

等号は$a=\dfrac{4}{a}$すなわち$a^2=4$のとき成り立つ。$a>0$より$a=2$のとき等号が成り立つ。

＊＊＊