２章　図形と方程式

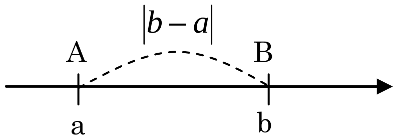
１節　点と直線

① 直線上の点の座標

☆数直線上の２点間の距離

　数直線上に２点 A(a)、B(b)をとる。２点間の距離 AB は、
座標の差 $b-a$ の絶対値をとったものになる。

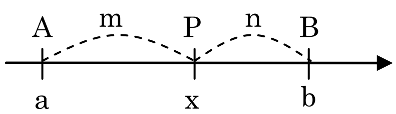
$$\mathrm{AB}=|b-a|$$



これは a 、b がどのような値でも成り立つ。

☆内分点

　２点 A(a)、B(b)があり、線分 AB の中に点 P(x)がある。
AP と PB の長さの比が $m:n$ のとき、点 P は線分 AB を
$m:n$ に内分するという。また、点 P を内分点という。



　このとき $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ より

$$(x-a):(b-x)=m:n$$

よって　$n(x-a)=m(b-x)$

$$(m+n)x=na+mb$$

よって内分点の座標 x は　$x=\dfrac{na+mb}{m+n}$

> 　２点 A(a)、B(b)があり、線分 AB を
> $m:n$ に内分する点を P(x)とすると
>
> $$x=\frac{na+mb}{m+n}$$

例１

　２点 A(－２)、B(８)を結ぶ線分 AB を $3:2$ に内分する点を P(x)とすると、

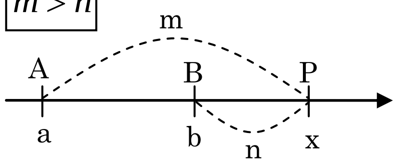
$$x=\frac{na+mb}{m+n}\text{ より、 }x=\frac{2\cdot(-2)+3\cdot 8}{3+2}=4$$

＊＊＊

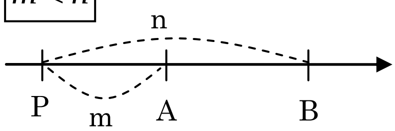
☆外分点

　２点 A(a)、B(b)があり、線分 AB の延長上に点 P(x)がある。
AP と PB の長さの比が $m:n$ のとき、点 P は線分 AB を
$m:n$ に外分するという。また、点 P を外分点という。
　点 P は $m>n$ のとき点 B の外側へ、$m<n$ のときは点 A の
外側へ位置する。

$\boxed{m>n}$



$\boxed{m<n}$



このとき $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ より

$$(x-a):(x-b)=m:n$$

よって　$n(x-a)=m(x-b)$

$$-na+mb=(m-n)x$$

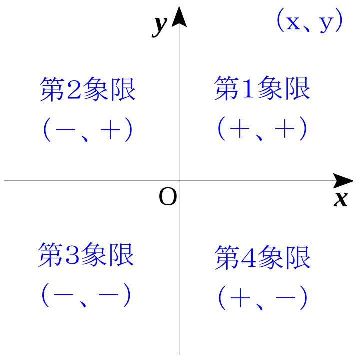
よって外分点の座標 x は　$x=\dfrac{-na+mb}{m-n}$

> ２点 A(a)、B(b)があり、線分 AB を
> $m:n$ に外分する点を P(x)とすると
>
> $$x=\frac{-na+mb}{m-n}$$

＊＊＊

☆座標平面

　x 軸と y 軸によって分けられた４つの部分を「象限」と呼び、それぞれ第１象限～第４象限という。順番は右上から反時計回りになる。



＊＊＊

☆２点間の距離

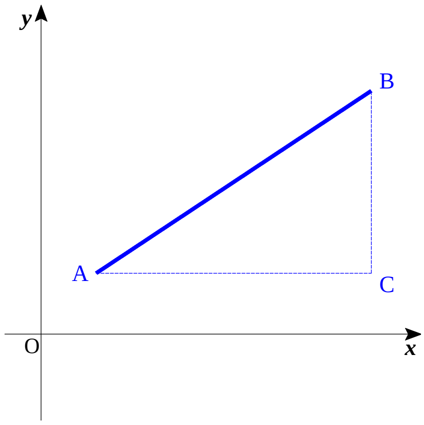
　座標上にある２点間の距離を求めてみよう。

座標上に点 A、B がある。２点間の距離 AB は、AB を斜辺とした直角三角形を描くと、直角の点を C とすれば、３平方の定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2$$

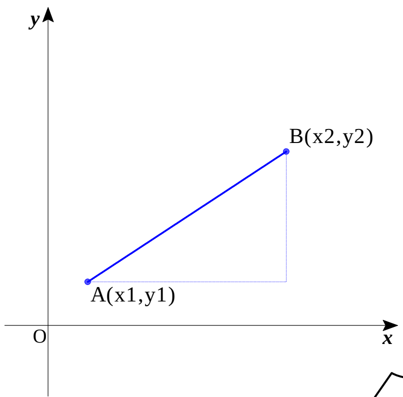
となる。この式より、

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2}$$



まとめると

> 点 A、B の座標を $\mathrm{A}(x_1,y_1)$、$\mathrm{B}(x_2,y_2)$ とすれば
> 点 A、B 間の距離は
>
> $$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
>
> となる。



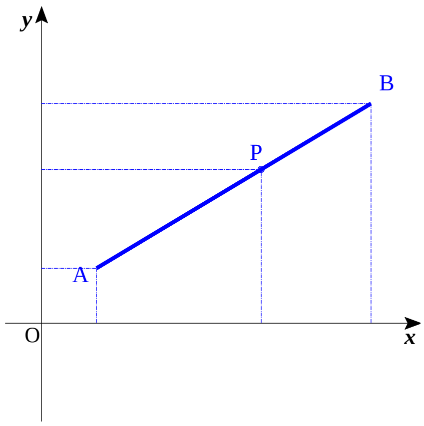
例題１　２点 $\mathrm{A}(2,-1)$、$\mathrm{B}(4,5)$ 間の距離を求めよ。

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(4-2)^2+\{5-(-1)\}^2}=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

＊＊＊

☆内分点・外分点

座標平面にある２点の内分点・外分点を求めてみよう。
いま、座標平面上に２点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ がある。
線分 AB 上に点 P があり、線分 AB を $m:n$ に内分している。
x 軸、y 軸に垂線を降ろすと、点 P の座標は点 A、B の座標も $m:n$ に内分している。



つまり、点 P の座標は点 A、B の x 座標、y 座標をそれぞれ $m:n$ に内分したものになる。

点 P の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

になる。

平面座標上の内分点・外分点

２点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を P、外分する点を Q とする。

内分点 P の座標は $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

とくに中点の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

外分点 Q の座標は $\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

＊＊＊

☆分点公式の利用

例題１

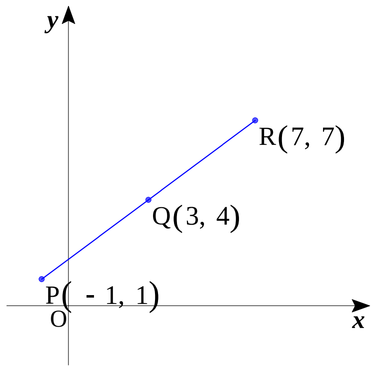
点 $A(3,4)$ に関して、点 $P(-1,1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解　点 Q の座標を (a,b) とすると、線分 PQ の中点が点 A になる。

中点の公式より

$$\frac{-1+a}{2}=3、\quad \frac{1+b}{2}=4$$

これを解いて　$a=7$、$b=7$　Q の座標は $(7,7)$



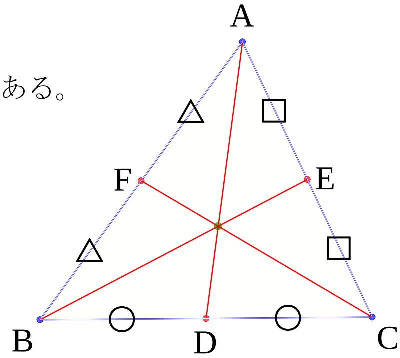
＊＊＊

☆３角形の重心

３点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$ を頂点とする△ABC がある。
各頂点から各対辺の中点を結ぶ線分（「中線」という）は１つの点で交わる。この点を点 G とすると、点 G は△ABC の「重心」という。　重心 G の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

となる。また、点 G は中線をそれぞれ頂点側から $2:1$ に内分する。



例１

３点Ａ$(3,4)$、Ｂ$(-2,-1)$、Ｃ$(8,3)$を頂点とする△ABC の重心 G の座標を求めよ。
x 座標、y 座標をそれぞれ足して３で割ればよい。

$$x=\frac{3+(-2)+8}{3}=3、\qquad y=\frac{4+(-1)+3}{3}=2$$

よって、G$(3,2)$

＊＊＊

③ 直線上の点の座標

☆１点を通り傾きが m の直線

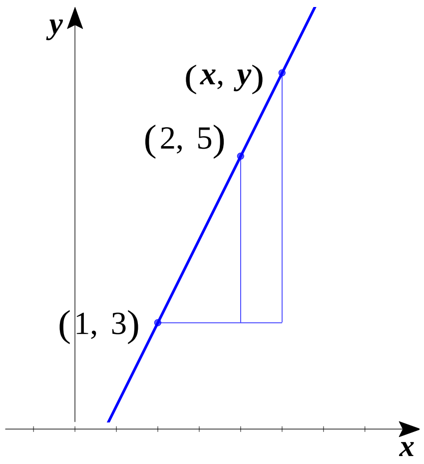
直線の傾きという考え方をおさらいする。傾きという考え方は、

$$傾き=\frac{yの増加分}{xの増加分}$$

であった。例えばＡ$(1,3)$を通り、傾きが２の直線を考える。
直線上に適当な点(x,y)をとると、x と y の関係は

$$\frac{y-3}{x-1}=2\qquad\left(\frac{yの増加分}{xの増加分}=傾き\right)$$

となり、整理すれば $y-3=2(x-1)$ となる。



まとめると

> 点(x_1,y_1)を通り、傾きが m の直線の方程式は
> $$y-y_1=m(x-x_1)$$

＊＊＊

☆１点を通り y 軸に平行な直線

例２

点$(3,1)$を通り、y 軸に平行な直線は、x 座標が常に３の直線になる。この直線の方程式を

$$x=3$$

と表わす。

＊＊＊

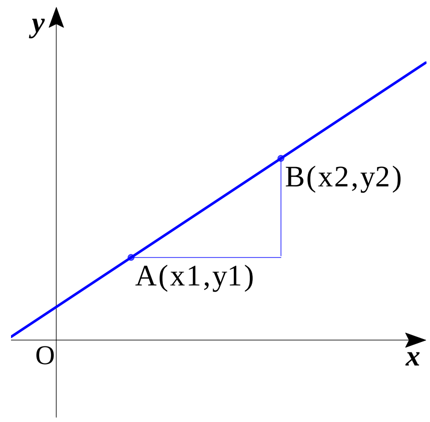
☆２点を通る直線

２点Ａ(x_1,y_1)、Ｂ(x_2,y_2)を通る直線の方程式を求めてみよう。
傾きの考え方から直線 AB の傾き m は

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\qquad\left(傾き=\frac{yの増加分}{xの増加分}\right)$$

となる。傾きがわかれば、通る点は二つ分かっているので、
どちらかを使えばよい。

$$y-y_1=m(x-x_1)\quad もしくは\quad y-y_2=m(x-x_2)$$



となる。m も詳しく書くと

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

ただし、$x_1=x_2$ のときは傾きの分母が０になるので、この公式は使えない。
ただし、$x_1=x_2$ のときは傾きの分母が０になるので、この公式は使えない。

$x_1 = x_2$ のとき、直線 AB は y 軸に平行であるから、その直線の方程式は

$$x = x_1$$

2 点を通る直線

> 2 点 A(x_1, y_1)、B(x_2, y_2) を通る直線の方程式は
>
> $x_1 \neq x_2$ のとき　$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_2}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
>
> $x_1 = x_2$ のとき　$x = x_1$

＊＊＊

☆１次方程式と直線

$a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき $ax + by + c = 0$ の表す図形は直線になる。

２直線の交点の座標は、２つの直線の方程式を連立方程式としたときの解になる。

例題２

２直線 $x + y - 5 = 0$、$2x - y - 1 = 0$ の交点と点 $(-2, 0)$ を通る直線の方程式を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$　２直線の方程式から連立方程式を作って

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

を解いて

$$x = 2、\ y = 3$$

よって２直線の交点は $(2, 3)$。点 $(2, 3)$ と点 $(-2, 0)$ を通る直線の方程式は

$$y - 3 = \frac{0 - 3}{-2 - 2}(x + 2)$$

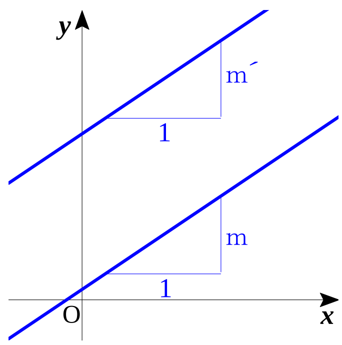
整理すると　$-3x + 4y - 6 = 0$　となる。

＊＊＊

４ 直線上の点の座標

☆平行条件と垂直条件

２直線 $y = mx + n$、$y = m'x + n'$ がある時



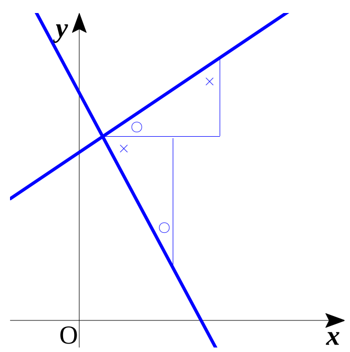
①２直線が平行のとき

２直線が平行であるとき傾きは一緒なので

$$m = m'$$

②２直線が垂直のとき

２直線が垂直であるとき、右の図で２つの直角三角形はひっくり返った位置にあって相似であるから



$$m' = -\frac{1}{m}$$

つまり

$$mm' = -1$$

2 直線　$y=mx+n$、$y=m'x+n'$　が
　平行ならば　$m=m'$　垂直ならば　$mm'=-1$
　　　　（m、n はそれぞれの傾き）

例３

　2 直線　$3x+y+4=0$　と　$-x+3y-6=0$　はそれぞれ

$y=-3x-4$、$y=\dfrac{1}{3}x+2$　と変形できる。二つの傾きの積は

$$(-3)\times\frac{1}{3}=-1$$　となるので、2 直線は垂直である。

＊＊＊

例題３　次の直線の方程式を求めよ

（１）点 $(1,3)$ を通り、直線 $y=4x-1$ に平行な直線

$y=4x-1$ と平行な直線の傾きは４である。

点 $(1,3)$ を通り、傾き４の直線は

$$y-3=4(x-1)$$
$$y=4x-1$$

（２）点 $(2,5)$ を通り、直線 $4x+3y-10=0$ に垂直な直線

$4x+3y-10=0$ を変形して $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{10}{3}$、これと垂直な直線の傾きを m とすると

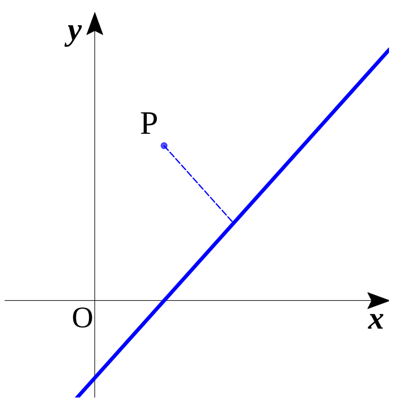
$$-\frac{4}{3}\times m=-1$$　より　$m=\dfrac{3}{4}$

点 $(2,5)$ を通り、傾きの $\dfrac{3}{4}$ 直線は　$y-5=\dfrac{3}{4}(x-2)$　変形して

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$$

＊＊＊

☆点と直線の距離



　右の図のような、ある直線と点Ｐとの間の距離を考える。
この場合、距離とは最短距離のことであるから、点Ｐから
直線に垂直になるように伸ばした線の長さが距離になる。

例　点Ａ $(2,3)$ と直線 l ： $2x-y-11=0$ の距離を求めてみよう。
まず、点Ａを通り、直線 l に垂直な直線を求める。

$$2x-y-11=0$$
$$y=2x-11$$

より、傾き $-\dfrac{1}{2}$ で $(2,3)$ を通る直線は

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)+3$$

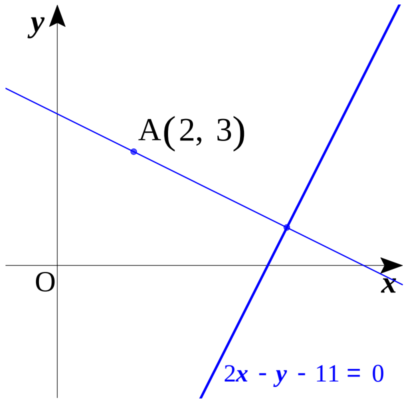
この直線を m とすると、l と m の交点は、連立方程式

$$\begin{cases} 2x-y-11=0 \\ y=-\dfrac{1}{2}(x-2)+3 \end{cases}$$

を解いて求めると、交点の座標は$(6,1)$、点Aと交点の距離は

$2\sqrt{5}$

これが点Aと直線lの距離になる。



点Aと直線lの距離を求めるには

①Aを通り、lに垂直な直線mを求める。
②直線lと直線mの交点を求める。
③交点と点Aの距離を求める。

という手順を踏む。

また、点と直線の距離の公式を使って求めることもできる。

点(x_1, y_1)と直線$ax+by+c=0$の距離dは

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

＊＊＊